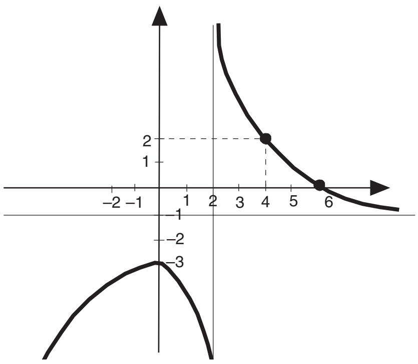
RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

Actividades iniciales

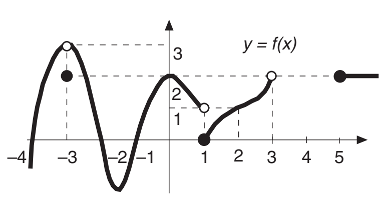
1. Representa gráficamente una función que satisfaga las siguientes propiedades:

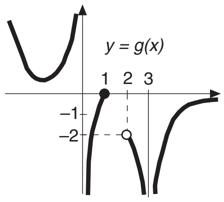
- $Dom\, f = R - \{2, 4\}$
- **Asíntota horizontal:** $y = -1$
- **Asíntota vertital:** $x = 2$
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $f(6) = 0; f(0) = -3$



Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Determina en las siguientes funciones los datos pedidos:





- $f(-3)$ • $f(-2)$ • $f(0)$
- $f(4)$ • $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

$\boxed{y = f(x)}$

$f(-3) = 2; f(-2) = 0; f(0) = 2; f(4)$ no definida

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 3; \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2; \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

$\boxed{y = g(x)}$

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -2; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe

2 Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

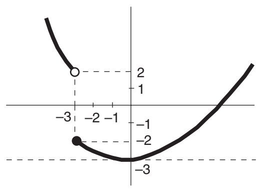
a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 2; \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -2; f(-3) = -2;$
$Dom\, f = R; Im\, f = [-3, +\infty)$

b) **g estrictamente decreciente en (0,6); asíntota vertical en $x = 6$;** $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = -2;$ **no existe $g(3)$**

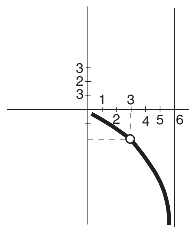
c) **h acotada inferiormente por 2;** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2;$ **asíntota vertical en $x = 2$;** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

d) $Dom\, l = (0, +\infty) = R^+; Im\, l = R; l(2) = 3;$
$\lim\limits_{x \to 2^-} l(x) = 1; \lim\limits_{x \to 2^+} l(x) = 5; \lim\limits_{x \to 5^-} l(x) = -\infty;$
$\lim\limits_{x \to 5^+} l(x) = +\infty$

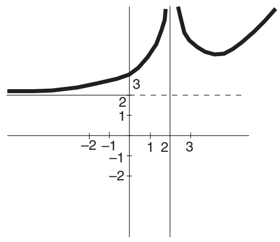
a)



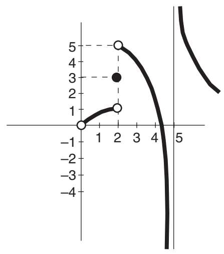
b)



c)



d)



3 Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1}\ \boxed{x = -1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Asíntotas verticales: $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x + 2} = \pm\infty$ no existen

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x + 2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - m \cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = x - 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Asíntotas verticales: no existen

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Asíntotas oblicuas: no existen

4 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{+\infty} = +\infty$$

No existe $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

5 Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ con su asíntota oblícua.

La asíntota oblicua tendrá por ecuación $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $\boxed{y = x - 2}$

Para hallar los puntos de corte de la asíntota oblicua con la función $f(x)$, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \text{el punto es } P\ (2,\ 0)$$

6 Calcula el límite cuando x tiende a 2 y cuando x tiende a –2 de la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

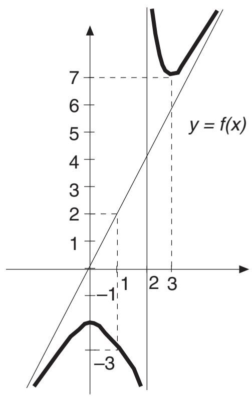
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x^2 - 4 \ge 0 \\ -(x^2 - 4) \text{ si } x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x \le -2;\ x \ge 2 \\ -x^2 + 4 \text{ si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^2 + 4) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-x^2 + 4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 0$$

7 Determina en la función cuya gráfica se adjunta los datos siguientes:

- ***Dom f***
- ***Im f***
- **Monotonía**
- **Extremos relativos**
- **Asíntotas**
- **Acotación**
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 2(x)]$



Dom f = *R* – {2};
Im f = (–∞, –2] ∪ [7, +∞)
Estrictamente creciente (–∞, 0) ∪ (3, +∞)
Estrictamente decreciente (0, 2) ∪ (2, 3)
Máximo relativo (0, –2); Mínimo relativo (3, 7)
Asíntota vertical: $x = 2$; Asíntota oblicua $y = 2x$
No acotada.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$

8 Siendo $f(x) = \sqrt{2x+3}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+3} - 3\right)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x - 6}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

9 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-4}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to -\infty} 4x^4$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{3}{x^3}\right]$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^{-2}}{5}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left[\dfrac{x^5}{3}\right]$ ***f)*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{2}{x^5}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{3}{x+2}\right]$ ***h)*** $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{-x}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} 3^{-x}$ ***j)*** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2}{3}\right]^x$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$ ***l)*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$

a) 0 *b)* +∞ *c)* +∞ *d)* +∞ *e)* 0 *f)* 0
g) 0 *h)* 0 *i)* +∞ *j)* 0 *k)* +∞ *l)* –∞

10 **Calcula los siguientes límites:**

$a)\ \lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{x^2-4}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 2} [x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

$c)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

$e)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{1+x}{2+x}\right]^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}\right]$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{3x^2-5}{[3x^2+x]}\right]^{x^2-1}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$ $\quad j)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$k)\ \lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ $\quad l)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\,(x^2+4)}{(x+1)\cdot x} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{3}{x-2}\cdot(x-1-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 2} 3} = e^3$$

$$c)\ \lim_{x\to +8} \sqrt{4x^2-5}-(2x-3) \overset{\infty\,-\,\infty}{=}$$

$$\overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to +8} \frac{\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]\left[\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right]}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to +8} \frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to +8} \frac{\dfrac{12x}{x}-\dfrac{14}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}+\dfrac{2x}{x}-\dfrac{3}{x}} = 3$$

$$d)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-2}{x^2-2x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$e)\ \lim_{x\to +8} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to +8} \frac{\sqrt{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

$$f)\ \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} \underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\underset{\frac{0}{0}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$g)\ \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} \underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\underset{\frac{0}{0}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$h)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1} \underset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-1)\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x^2-1)\,(-5-x)}{3x^2+x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$i)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{2}{(x-2)}} = +\infty$$

$$j)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)\,(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} (x+1)\,(\sqrt{x+3}+2) = 8$$

$$k)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\cdot(x^2-x)}{(x-1)\,(x+4)}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{(x+4)}} = e^{\frac{1}{5}}$$

$$l)\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)\,(\sqrt{x^2+5}+3)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)\,(\sqrt{x+7}-3)\,(\sqrt{x+7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)\,(\sqrt{x^2+5}+3)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = 4$$

11 **Calcula los siguientes límites:**

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ (5x)}{sen\ (2x)}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{tg^2\ (x-2)}{x^2-4}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\ (7x)}{4x^2}$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x-\sqrt{9x^2+4x-2}}{3}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 0} [1+3x]^{\frac{4}{x}}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{2x^2+3}{4x^2+5}\right]^{\frac{x}{2}}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ln\ (x-1)}{2x-4}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to -\infty} [ln\ (2x-3)-ln\ (x+1)]$

$i)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-1}{2x}$ $\quad j)\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ a>0}} \dfrac{x^2-2ax+a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$k)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2x-1}{2x+5}\right]^{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(5x)}{sen\,(3x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2} \frac{tg^2\,(x-2)}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x+2)} = 0$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,(7x)}{4x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(7x)^2/2}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2}{8x^2} = \frac{7}{8}$$

$$d)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-\sqrt{9x^2+4x-2}}{3} \overset{\infty\,-\,\infty}{=}$$

$$\overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(3x-\sqrt{9x^2+4x-2})\,(3x+\sqrt{9x^2+4x-2})}{3\,(3x+\sqrt{9x^2+4x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-4x}{9x + 3\sqrt{9x^2+4x-2})} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{4x}{x}}{\frac{9x}{x} + 3\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{2}{x^2}})} = \frac{-4}{9+3\sqrt{9}} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$$

e) $\lim_{x\to0} (1+3x)^{\frac{4}{x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to0} \frac{4}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim_{x\to0} \frac{12x}{x}} = e^{12}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2+3}{4x^2+5}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{-\infty} = 0$

g) $\lim_{x\to2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to2} \frac{\ln[1+(x-2)]}{2x-4} = \lim_{x\to2} \frac{x-2}{2x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to2} \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to+\infty} [\ln(2x-3) - \ln(x+1)] \overset{\infty-\infty}{=}$

$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \ln 2$

i) $\lim_{x\to0} \frac{2^{3x}-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{3x\cdot\ln 2}{2x} = \frac{3}{2}\ln 2$

j) $\lim_{\substack{x\to a\\ a>0}} \frac{x^2-2ax+a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$

$= \lim_{x\to a} (x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = 0$

k) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{\sqrt{x^2+3x}-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-x} \overset{1^{\infty-\infty}}{=}$

$\overset{1^{\infty-\infty}}{=} 1^{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}} = 1^{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}} = 1^3 = 1$

12 **Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^3-9x}$**

Asíntotas verticales: son los ceros del denominador

$$x^3 - 9x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}\ \boxed{x=3}\ \boxed{x=-3}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+3}{x^3-9x} = 2 \Rightarrow \boxed{y=2}$

13 **Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique**

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+5x}{x^2+1}\right]^{ax} = e^{-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+5x}{x^2+1}\right)^{ax} \underset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} ax\left(\frac{x^2+5x}{x^2+1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{ax(5x-1)}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{5ax^2-ax}{x^2+1}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{5a} \Rightarrow e^{5a} = e^{-5} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

14 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$ y estudia si la gráfica corta a las asíntotas.**

Asíntotas verticales: son los ceros del denominador

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=4}\ \boxed{x=-1}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} = \pm\infty$ no tiene

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-2}{x^3-3x^2-4x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4x-2}{x^2-3x-4} = 4$$

La asíntota oblicua es $y = x + 4$.
Veamos si la curva corta a esta asíntota y, para ello, resolvemos el sistema:

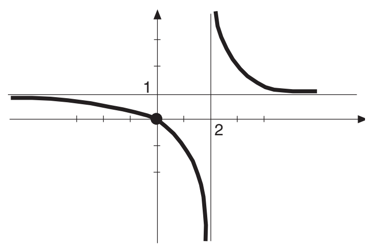
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} \\ y = x+4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4} = x+4 \Rightarrow \\ x = -\frac{7}{8},\ y = \frac{25}{8} \end{array}$$

Se cortan en el punto $\left(-\frac{7}{8}, \frac{25}{8}\right)$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

15 **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$



16 **Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$**

¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función racional?, ¿cuántas horizontales?, ¿cuántas verticales?

Asíntotas verticales: $\boxed{x=2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3}{2x-4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \pm\infty$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2x-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2-3}{2x-4} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-3}{2x-4} = 1$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales como le pasa a las funciones tangente, cotangente, etc.

17 Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+1} - x\right] = 2}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{4x+5}{4x+3}\right]^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{4x^2+1}{4x^2+\Pi}\right]^{ax^2}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+ax+1} - x \overset{\infty-\infty}{=}$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax+1-x^2}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x+5}{4x+3}\right)^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{4x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\Pi}\right)^{ax^2} \underset{a\neq 0}{\overset{1^\infty}{=}} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} ax^2\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\Pi} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a(1-\Pi)x^2}{4x^2+\Pi}} =$$

$$= e^{\frac{a(1-\Pi)}{4}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{1-\Pi}}$$

18 Calcula los siguientes límites:

- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}\right]}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{8}} - \sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{8}}\right]}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(2x)}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2(2x)}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)^2}{3x^2} = \dfrac{4}{3}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{8}} - \sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{8}} \overset{\infty-\infty}{=}$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}} - \sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}} + \sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}} + \sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{11}{8}}{\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}} + \sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}} = \frac{1}{2}$$

19 Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

***a)* Si $a \notin Dom\, f$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?**

***b)* Si $a \in Dom\, f$, ¿puede ser $x = a$ asíntota vertical?**

a) Si. Por ejemplo $f(x) = x \cdot \text{sen}\, \dfrac{1}{x}$

$0 \notin Dom\, f$, pero existe $\lim\limits_{x\to 0} x\, \text{sen}\, \dfrac{1}{x} = 0$

b) No es posible pues las asíntotas verticales son los valores de x para los cuales $y \to \pm\infty$.

20 Discute el siguiente límite en función de los valores de a:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right]}$$

1.º Si $a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} = +\infty$

2.º Si $a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} \overset{\infty-\infty}{=}$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right)\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}\right)}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4-ax}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 \text{ si } a = 3 \\ -\infty \text{ si } a > 3 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 3 \end{cases}$$

21 Calcula los siguientes límites:

- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right]}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\, x - x^2}{x^2}}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sen\, x}{x}}$
- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sen \left(\dfrac{1}{x}\right)}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1-3}{1-x^3} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x^2+x+1)(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\,x - x^2}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\,x}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} - 1 =$
  $= 1 - 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen\,x}{x} = 0$, pues $sen\,x \in [-1,1]$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, pues $sen\,\dfrac{1}{x} \in [-1,1]$

22 Calcula el valor de m que haga cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{3-x}{2-x}\right]^{mx} = \frac{e}{e^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3-x}{2-x}\right)^{mx} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} mx\left(\frac{3-x}{2-x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{mx}{2-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-m} = \frac{e}{e^2} \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

23 Obtén las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$$

Asíntotas verticales: $\boxed{x = 2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2} = \pm\infty$ no tiene.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2 + x - 5}{x - 2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x - 2} - x\right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = 3$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = x + 3}$

24 Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas y en caso afirmativo hállalas:

$$f(x) = ln\,(x - 1)$$
$$g(x) = e^{x-1}$$

- $f(x) = ln\,(x - 1)$

Para $x = 1$ $y \to -\infty$ tiene «media» asíntota vertical en $\boxed{x = 1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\,(x - 1) = +\infty$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,(x - 1)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} ln\,(1 - x) - 0 \cdot x = +\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

- $g(x) = e^{x-1}$

Asíntotas verticales: no tiene.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{x-1} = +\infty \ ; \lim_{x\to -\infty} e^{x-1} = 0$$

tiene «media» asíntota horizontal $\boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.